Capitolo 7

Trigonometria

118. La misura in radianti di un angolo di 20° è

A. $\frac{\pi}{7}$

B. $\frac{\pi}{8}$

C. $\frac{\pi}{9}$

D. $\frac{\pi}{10}$

E. $\frac{\pi}{18}$

Trigonometria; misura degli angoli.

Ricordiamo che un angolo di π radianti corrisponde a un angolo di 180°. Poiché

$$20^\circ = \frac{180^\circ}{9}$$

la misura in radianti dell'angolo di 20° è $\frac{\pi}{9}$. Quindi la risposta esatta è la C.

Conversione delle misure degli angoli da gradi a radianti.

---

119. Siano α e β due angoli legati fra di loro dalla relazione $\beta = \pi - \alpha$. Quale delle seguenti uguaglianze è vera?

A. $\sin\alpha + \sin\beta = 0$

B. $\cos\alpha + \cos\beta = -1$

C. $\tan\alpha + \tan\beta = 0$

D. $\cos\alpha = \cos\beta$

E. $\tan\alpha = \tan\beta$

👁 *Trigonometria; angoli supplementari.*

✎ Gli angoli α e β sono *supplementari* (la loro somma è π), quindi – come si constata, ad es., sulla circonferenza trigonometrica) – soddisfano le relazioni

$$\sin\alpha = \sin\beta \qquad ; \qquad \cos\alpha = -\cos\beta$$

Nessuna di queste due compare tra le risposte proposte, tuttavia A, B e D vanno scartate perché in contrasto con queste uguaglianze. Le altre due risposte riguardano la funzione tangente. Notiamo che dalle due uguaglianze scritte sopra segue anche

$$\tan\alpha = -\tan\beta$$

che è equivalente alla C (e in contraddizione con la E). Quindi la risposta esatta è la C.

⚓ *Relazione tra seno, coseno e tangente di angoli supplementari.*

---

120. Se un angolo misura 15°, la sua misura in radianti è

A. minore di 0,25 rad

B. compresa fra 0,25 rad e 0,50 rad

C. compresa fra 0,50 rad e 0,75 rad

D. compresa fra 0,75 rad e 1 rad

E. maggiore di 1 rad

Trigonometria; misura degli angoli.

Ricordiamo che un angolo di π radianti corrisponde a un angolo di 180°. Poiché

$$15° = \frac{180°}{12}$$

l'angolo di 15° misura $\frac{\pi}{12}$ rad.

Quanto vale all'incirca il numero $\pi/12$ in forma decimale? Invece che dividere $3,14$ (un'approssimazione di π) per 12, ragioniamo così: π è "poco più" di 3, quindi $\pi/12$ è "poco più" di $3/12$, cioè di $1/4$. Quindi l'angolo misura "poco più" di $1/4$ rad, e la risposta esatta è la B.

(Il risultato della divisione di $3,14$ per 12, eseguita con carta e penna, dà il valore troncato $0,26$.)

Conversione delle misure degli angoli da gradi a radianti; confronti numerici.

---

121. L'espressione

$$\cos^2 1 - \sin^2 1$$

è uguale a

A. $-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$

B. $\cos 2$

C. 1

D. $2\cos 1 - 2\sin 1$

E. $-\frac{1}{2}$

Trigonometria; identità trigonometriche.

✎ Anzitutto, osserviamo che l'angolo di 1 rad *non* rappresenta un valore notevole per le funzioni seno e coseno, quindi occorre resistere alla tentazione di scegliere frettolosamente, tra le risposte, una che dia per risultato una "cifra tonda". L'espressione del testo ci suggerisce invece di usare l'identità

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$$

Applicata ad $\alpha = 1$, essa dà

$$\cos^2 1 - \sin^2 1 = \cos 2$$

Quindi la risposta esatta è la B.

⚓ *Formule di duplicazione.*

---

122. L'uguaglianza

$$\cos 2x = \cos^4 x - \sin^4 x$$

è verificata

A. solo per $x = \dfrac{\pi}{2}$

B. per infiniti valori di x, ma non per ogni x reale

C. per ogni x reale

D. per nessun x reale

E. solo per $x = 0$

👁 *Trigonometria; identità trigonometriche.*

✎ Osserviamo che

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(formula di duplicazione), mentre

$$\cos^4 x - \sin^4 x = \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(prodotto notevole $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, e relazione fondamentale della trigonometria $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$), quindi le due espressioni scritte sono identicamente uguali. La risposta esatta è la C.

Lo studente constati che l'uguaglianza data è verificata per i due valori notevoli $x = \pi/2$ e $x = 0$. Questo fatto porta a concludere che A, D, E sono risposte errate. Ma per scegliere la risposta giusta tra B e C bisogna ragionare come si è detto.

Identità fondamentale della trigonometria; formula di duplicazione; prodotti notevoli.

---

123. Sia α la misura in radianti di un angolo con $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Se è

$$\cos\alpha = \frac{1}{4}$$

allora

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$$

è uguale a

A. $\frac{1+\sqrt{15}}{4\sqrt{2}}$

B. $\frac{-1+\sqrt{15}}{4\sqrt{2}}$

C. $\frac{-1-\sqrt{15}}{4\sqrt{2}}$

D. $\frac{1-\sqrt{15}}{4\sqrt{2}}$

E. $\frac{3}{4}$

Trigonometria; identità trigonometriche.

Per le formule di addizione, si ha

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\alpha\cos\frac{\pi}{4} + \cos\alpha\sin\frac{\pi}{4} =$$

(poiché $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$)

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha$$

Ora sfruttiamo le altre informazioni: α del quarto quadrante e $\cos\alpha = \frac{1}{4}$, perciò

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{\frac{15}{16}} = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

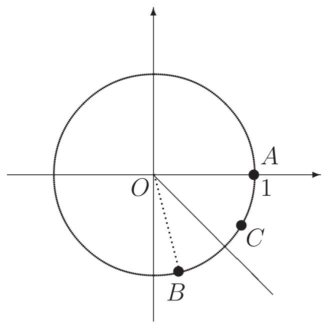
In conclusione

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{15}}{4}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1-\sqrt{15}}{4\sqrt{2}}$$

e la risposta esatta è la D.

☞ Una figura anche piuttosto grossolana avrebbe potuto convincere a priori che l'angolo $\alpha+\pi/4$ si trova nel quarto quadrante, e quindi ha seno negativo.

(Si disegni, sulla circonferenza trigonometrica, l'angolo α che si trova nel quarto quadrante e ha coseno $1/4$ – individuato nella figura seguente dall'arco che va dal punto A al punto B di ascissa $1/4$ – e poi lo si incrementi di mezzo angolo retto. Si ottiene così il punto C in figura e l'angolo $\alpha+\pi/4$ è quello che insiste sull'arco AC.)



Questa costruzione geometrica avrebbe permesso di scartare subito tutte le risposte tranne due: C e D. Per scegliere la risposta esatta, comunque, è necessario il calcolo.

⚓ *Formule di addizione; relazioni tra seno e coseno di un angolo, in base al quadrante.*

---

124. Il triangolo $\mathcal{T}$ ha un lato lungo 1 cm, un altro lato lungo $2\sqrt{2}$ cm e l'angolo tra essi compreso è di 60°. Allora

A. $\mathcal{T}$ è rettangolo

B. l'area di $\mathcal{T}$ è uguale a $\sqrt{\frac{3}{2}}$ cm^2

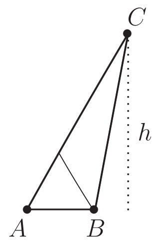
C. $\mathcal{T}$ è isoscele

D. l'area di $\mathcal{T}$ è uguale a $\sqrt{6}$ cm^2

E. l'area di $\mathcal{T}$ è uguale a $2\sqrt{2}$ cm^2

Trigonometria; applicazioni geometriche della trigonometria.

Disegnamo un triangolo equilatero di lato $\overline{AB} = 1$ e un segmento AC, come in figura, lungo circa 3 (perché $2\sqrt{2} \simeq 2 \times 1,41 = 2,82$).



Allora il triangolo ABC è il triangolo $\mathcal{T}$ del testo, e dall'osservazione della figura non sembra che $\mathcal{T}$ sia né isoscele né rettangolo. Quindi le risposte A e C saranno false; poiché le altre risposte dicono quanto vale l'area, calcoliamola.

Chiamiamo h l'altezza relativa al lato di lunghezza 1 di $\mathcal{T}$. Si ha

$$h = 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$$

(Non è comunque necessaria la trigonometria per questo calcolo: si può anche notare che h è l'altezza di un triangolo equilatero di lato $\overline{AC} = 2\sqrt{2}$.)

Quindi l'area di $\mathcal{T}$ è uguale a

$$\frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

e la risposta esatta è la B.

⚓ *Risoluzione dei triangoli rettangoli; area del triangolo.*

125. L'ombra di un campanile è lunga la metà della sua altezza. Detta $\alpha°$ la misura (in gradi) dell'angolo formato dal sole sull'orizzonte in quel momento, si può dire che

A. $\alpha° < 30°$

B. $30° \leq \alpha° < 45°$

C. $45° \leq \alpha° < 60°$

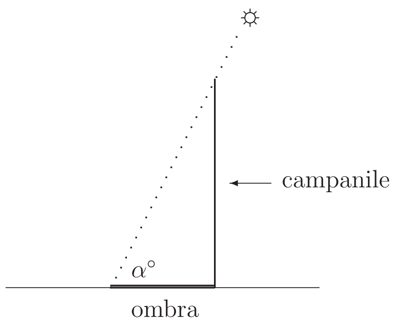
D. $60° \leq \alpha°$

E. è notte

👁 *Trigonometria; applicazioni geometriche della trigonometria.*

✎ Dire che "L'ombra di un campanile è lunga la metà della sua altezza" significa

$$\tan \alpha° = 2$$



Confrontando con il valore notevole

$$\tan 60° = \sqrt{3} < 2 = \tan \alpha°$$

si deduce che $60° < \alpha°$, e la risposta esatta è la D.

Definizione e valori notevoli della funzione $\tan x$.

---

126. La misura (in gradi) dell'angolo al centro di un settore circolare, avente raggio di 12 cm e limitato da un arco di 3 cm, è uguale a

A. 36°

B. 4°

C. circa 15°

D. circa 30°

E. maggiore di 40°

Trigonometria; arco di circonferenza.

Se l'angolo al centro è misurato in radianti, e la sua misura è α, vale la semplice relazione

$$\text{lunghezza dell'arco} = \alpha \times \text{lunghezza del raggio}$$

ossia $3 = \alpha \times 12$, e quindi

$$\alpha = \frac{3}{12}\ \text{rad} = \frac{1}{4}\ \text{rad}$$

Si tratta ora di convertire tale misura dai radianti ai gradi. La conversione esatta si fa mediante la formula

$$\alpha^\circ = \alpha \times \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{45^\circ}{\pi}$$

ma, non avendo a disposizione la calcolatrice e non volendo fare il conto a mano, facciamo il seguente ragionamento (grossolano ma efficace): π è circa 3, quindi α° è circa 15°. Poiché questa è la risposta C (e le altre risposte propongono valori molto lontani da questo, quindi non possono rappresentare una misura più accurata), la risposta esatta è la C.

(Eseguendo la divisione $\dfrac{45^\circ}{3,14}$ con carta e penna, si ottiene il valore troncato 14°.)

Conversione delle misure degli angoli da radianti a gradi; relazione tra arco ed angolo al centro in una circonferenza.

---

127. Quali delle seguenti relazioni sono verificate per qualunque valore dell'angolo α nel primo quadrante?

(a) $\cos\alpha + \sin\alpha \geq 1$

(b) $\cos\alpha + \sin\alpha = 1$

(c) $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}$

A. Le relazioni (a) e (c), ma non la (b)

B. Le relazioni (a) e (b), ma non la (c)

C. Le relazioni (b) e (c), ma non la (a)

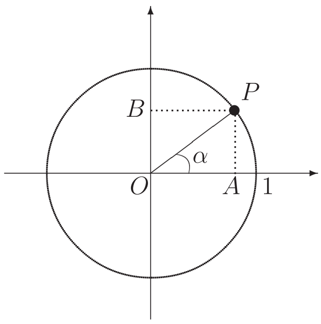
D. Solo la relazione (b)

E. Solo la relazione (c)

Trigonometria; funzioni trigonometriche.

Un minimo di familiarità con le funzioni seno e coseno porta subito a riconoscere che (b) è falsa. Ad esempio, per $\alpha = \pi/4$, $\cos\alpha$ e $\sin\alpha$ valgono entrambi $\sqrt{2}/2$, quindi la loro somma è $\sqrt{2} > 1$. Questa osservazione è sufficiente per concludere che B, D, E sono sicuramente false perché tutte e tre affermano la verità di (b).

Resta da scegliere tra A ed E. Entrambe affermano la verità di (c), quindi (c) è certamente vera ed è inutile controllarlo. Invece la A dice che (a) è vera, mentre la E lo nega. Occupiamoci allora della (a).



Ricordando il significato geometrico del seno e del coseno di un angolo sulla circonferenza trigonometrica (v. figura), la (a) afferma che nel triangolo rettangolo OAP la somma delle lunghezze dei cateti $\overline{OA} = \cos\alpha$ e $\overline{AP} = \sin\alpha$ non è mai minore della lunghezza dell'ipotenusa $\overline{OP} = 1$, il che è vero per una nota proprietà dei triangoli. Dunque la risposta esatta è la A.

Verifichiamo che la relazione (c) è vera (anche se non è necessario farlo per rispondere al quesito):

$$\frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{1+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{1}{\dfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}} = \cos^2\alpha$$

Relazioni tra le funzioni trigonometriche; relazioni tra i lati di un triangolo.

---

128. Se l'angolo α si trova nel secondo quadrante ed è

$$\cot\alpha = \sqrt{3} - 2$$

allora $\sin\alpha$ vale

A. $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

B. $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

C. $-\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

D. $-\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

E. $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$

Trigonometria; funzioni trigonometriche.

✎ Se α sta nel secondo quadrante, allora $\sin\alpha > 0$. Di conseguenza le risposte A, D, E sono sicuramente sbagliate, perché esprimono numeri negativi; rimane da scegliere tra B e C, e per far questo occorre esprimere $\sin\alpha$ in termini di $\cot\alpha$. Da

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

ricaviamo

$$\cot^2\alpha = \frac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} - 1$$

e quindi

$$\begin{aligned}\sin^2\alpha &= \frac{1}{1+\cot^2\alpha} = \frac{1}{1+\left(\sqrt{3}-2\right)^2} = \\ &= \frac{1}{8-4\sqrt{3}} = \frac{1}{4\left(2-\sqrt{3}\right)} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

Confrontiamo ora il valore trovato per $\sin^2\alpha$ con quello che si ricava dalle risposte B e C.
La B afferma $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$, e quindi

$$\sin^2\alpha = \frac{2+6+2\sqrt{12}}{16} = \frac{8+4\sqrt{3}}{16} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

che concorda con quanto trovato.
La C afferma invece $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, e quindi (con calcoli analoghi)

$$\sin^2\alpha = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

Perciò la risposta esatta è la B.

⚓ *Funzioni* $\sin x$, $\cos x$, $\cot x$, *loro relazioni e loro segno nei vari quadranti.*

---

129. L'espressione

$$\sin 31^\circ + \sin 29^\circ$$

è uguale a

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. 1

D. $\cos 1^\circ$

E. $\sin 1^\circ$

Trigonometria; identità trigonometriche.

I valori 31°, 29° si possono vedere come 30° + 1°, 30° − 1°, rispettivamente. Questo suggerisce di usare l'identità (formule di addizione e sottrazione)

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\\ &= 2\sin\alpha\cos\beta\end{aligned}$$

che per $\alpha = 30^\circ$ e $\beta = 1^\circ$ dà

$$\sin 31^\circ + \sin 29^\circ = 2\sin 30^\circ \cos 1^\circ = 2\frac{1}{2}\cos 1^\circ = \cos 1^\circ$$

Pertanto la risposta esatta è la D.

In questo quesito la strada da seguire emerge naturalmente se si hanno *ben in mente* le formule di addizione e sottrazione per la funzione seno (oltre al fatto che 30° sia un angolo notevole per le funzioni trigonometriche).

Valore delle funzioni trigonometriche per angoli notevoli; formule di addizione e sottrazione.

---

130. In una circonferenza di raggio r la lunghezza della corda sottesa ad un arco di lunghezza uguale al raggio è

A. $2r\cos 0,5$

B. $\dfrac{r}{2}$

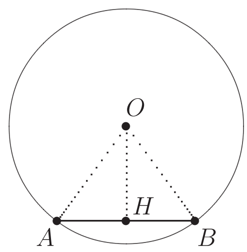
C. $2r\sin 0,5$

D. $\dfrac{r}{\sqrt{2}}$

E. $r\sin 1$

Trigonometria; applicazioni geometriche della trigonometria.

Sia α l'angolo al centro relativo alla corda e all'arco di cui parla il quesito. Dire che l'arco è uguale al raggio significa che α misura 1 rad (questa è proprio una delle possibili definizioni di radiante). D'altro canto (vedi figura) la metà della corda AB si può vedere come cateto AH del triangolo rettangolo OAH, la cui ipotenusa è lunga $\overline{OA} = r$, e $\widehat{HOA} = \alpha/2 = 0,5$ rad.



Quindi $\overline{AH} = r\sin 0,5$ e

$$\overline{AB} = 2 \times \overline{AH} = 2r\sin 0,5$$

Pertanto la risposta esatta è la C.

Misura degli angoli in radianti; relazione tra arco, raggio e angolo al centro in una circonferenza; risoluzione dei triangoli rettangoli.
